

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

4ο φυλλάδιο ασκήσεων

1) Στο σύνολο \mathbb{Z} των ακεραίων αριθμών, ορίζουμε σχέση σ ως εξής:

$$x\sigma y \Leftrightarrow 3x = 2y.$$

Να εξετάσετε αν η σ είναι αυτοπαθής, συμμετρική, αντισυμμετρική και μεταβατική.

2) Στο σύνολο \mathbb{N} των φυσικών αριθμών, ορίζουμε σχέση σ ως εξής:

$$x\sigma y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : x^2 = ky.$$

Να εξετάσετε αν η σ είναι αυτοπαθής, συμμετρική, αντισυμμετρική και μεταβατική.

3) Δίνεται μια διμελής σχέση σ σε ένα σύνολο E . Δείξτε ότι η σ είναι μερική διάταξη αν και μόνο αν $\Delta_E = \sigma \cap \sigma^{-1}$ και $\sigma \circ \sigma \subseteq \sigma$.

4) Να ορίσετε μια σχέση ισοδυναμίας \sim στο σύνολο $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ώστε η \sim να έχει τρεις κλάσεις ισοδυναμίας με διαφορετικό πλήθος στοιχείων η καθεμιά.

5) Να ορίσετε μια σχέση ισοδυναμίας \sim στο σύνολο $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ώστε η \sim να έχει δύο κλάσεις ισοδυναμίας και να ισχύει $n \not\sim n+1$ για $n = 1, 2, 3, 4$.

6) Να ορίσετε μια σχέση μερικής διάταξης στο σύνολο $E = \{x, y, z, w\}$ η οποία να έχει μέγιστο και ελάχιστο και να μην είναι γραμμική (ολική).

7) Στο σύνολο $A = \{a, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ να ορίσετε μια σχέση μερικής διάταξης \leq , ώστε να έχει ελάχιστο στοιχείο το a και ακριβώς τρία ψευδομέγιστα, τα $\gamma, \delta, \varepsilon$.

(Επιπλέον ερώτημα: Πόσες λύσεις έχει το πρόβλημα αυτό;)

8) Έστω σ μια διμελής σχέση σε ένα σύνολο E .

α) Δείξτε ότι η $\sigma \cup \sigma^{-1}$ είναι συμμετρική.

β) Να δείξετε ότι η $\sigma \cup \sigma^{-1}$ είναι η ελάχιστη συμμετρική σχέση στο E που περιέχει τη σ (δηλαδή αν τ μια συμμετρική σχέση στο E με $\sigma \subseteq \tau$ τότε $\sigma \cup \sigma^{-1} \subseteq \tau$).

9) Δίνονται δύο σχέσεις ισοδυναμίας σ και r σε ένα σύνολο E .

α) Να δείξετε ότι η $\sigma \cap r$ είναι επίσης σχέση ισοδυναμίας στο E .

β) Για κάθε $x \in E$ να δείξετε ότι $[x]_{\sigma \cap r} = [x]_{\sigma} \cap [x]_r$.

Σημείωση: Με $[x]_{\sigma}$ (ή αλλιώς με $\text{κλ}_{\sigma}(x)$) συμβολίζουμε την κλάση ισοδυναμίας του x ως προς τη σ , και αντίστοιχα για τα $[x]_r$ και $[x]_{\sigma \cap r}$.